

Entropía generalizada y transición clásico-cuántica

A.M. Kowalski, M.T. Martin, A. Plastino, L. Zunino
IFLP, UNLP, CIOP, CIC, CONICET

Introducción

En una serie de trabajos anteriores [1]-[3], hemos estudiado el **límite clásico** de la dinámica de un sistema semiclásico utilizando

- **Herramientas estadísticas como la entropía y la complejidad,**
- **mediante análisis en bandas wavelet y la metodología de Bandt and Pompe,**

dentro del contexto de la estadística de Shannon.

Como resultado hemos obtenido:

- **Información sobre el límite clásico**
- **Información sobre las herramientas estadísticas**

Que haremos ahora?

El propósito del trabajo actual es investigar las posibles contribuciones de la q – estadística a este problema [4]-[5].

Utilizamos la conocida como **Entropía de Tsallis normalizada** asociada a una distribución de probabilidades P

$$\mathcal{H}_{S_q}[P] = S_q[P]/S_{q,max} = \frac{1}{1-N^{1-q}} \sum_{j=1}^N (p_j - p_j^q),$$

donde $S_{q,max} = (1 - N^{1-q})/(q - 1)$,

para la Dist. Equiprobable $P_e = \{1/N, \dots, 1/N\}$.

La Distrib. P es calculada con

- a) Un análisis en bandas Wavelet y
- b) La Metodología de Bandt-Pompe.

Interacción de la materia con un campo clásico

Consideramos el hamiltoniano semiclásico [6]-[7]

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{P}^2}{m_q} + \frac{P_A^2}{m_{cl}} + m_q \omega^2 \hat{x}^2 \right),$$

que representa la contribución del modo cero de un campo externo a la producción de pares de mesones con carga. Tenemos:

$$\omega^2 = \omega_q^2 + e^2 A^2, \quad \mathbf{A} \text{ y } P_A \text{ son variables clásicas.}$$

Las Ecs. de movimiento (no lineales) resultan ser

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{x}^2 \rangle}{dt} &= \frac{\langle \hat{L} \rangle}{m_q}, & \frac{d\langle \hat{p}^2 \rangle}{dt} &= -m_q \omega^2 \langle \hat{L} \rangle, & \frac{d\langle \hat{L} \rangle}{dt} &= 2 \left(\frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{m_q} - m_q \omega^2 \langle \hat{x}^2 \rangle \right), \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{P_A}{m_{cl}}, & \frac{dP_A}{dt} &= -e^2 m_q A \langle \hat{x}^2 \rangle, & \hat{L} &= \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}. \end{aligned}$$

Además consideramos el **equivalente clásico del sistema**, con ecs. de movimiento semejantes. El **límite clásico** se obtiene con la energía relativa **E_R** tal que

$$E_r = \frac{|E|}{I^{1/2}\omega_q} \rightarrow \infty,$$

($E_r \geq 1$) donde la **Energía total E** y la cantidad **I** son **invariantes de movimiento**. **I** está relacionado al **Principio de Incerteza**

$$I = \langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle - \frac{\langle \hat{L} \rangle^2}{4} \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

El valor clásico es **$I=0$** . El **grado de convergencia** lo medimos con la norma

$$N_{\Delta u} = |u - u_{cl}|,$$

entre los vectores $u = (\langle \hat{x}^2 \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle, \langle \hat{L} \rangle)$ y su análogo clásico.

Mediante un análisis con **herramientas dinámicas** obtenemos que en el sendero luminoso hacia el límite clásico, hay **tres zonas: cuántica, de transición (compleja) y clásica**, separadas por ciertos valores

$E_r^{\mathcal{P}}$ Empieza el régimen caótico

E_r^{cl} Empieza la convergencia hacia el caso clásico

Resultados Entropía Tsallis Wavelet

La serie temporal que determina la Dist {P} es $\langle x^2 \rangle(t)$ (y x^2)
Utilizamos ocho bandas wavelet para los 5000 puntos de la serie.

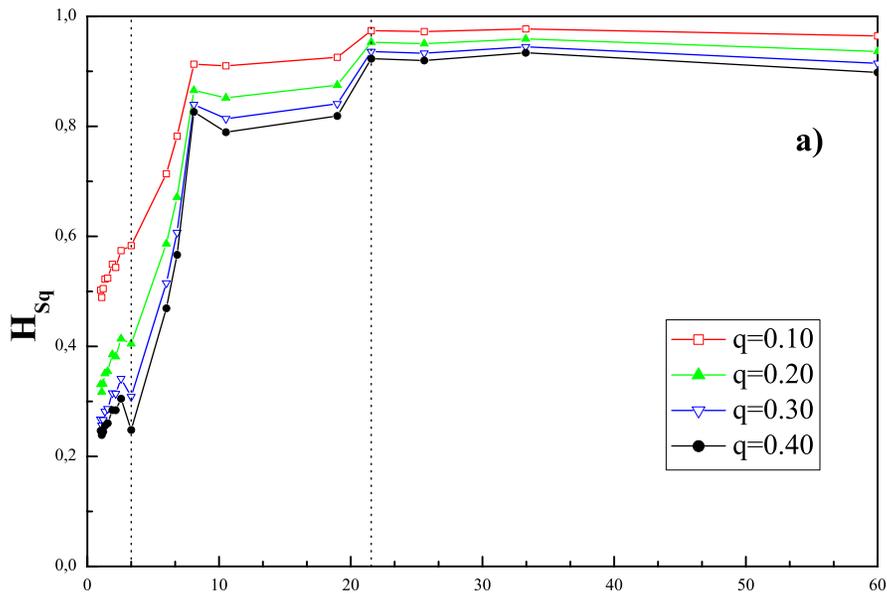
- ❑ **Identifica correctamente las tres regiones en el rango**

$$0 < q < 5$$

- ❑ **Optimiza la descripción de la zona cuántica en el rango**

$$0.1 < q \leq 0.4,$$

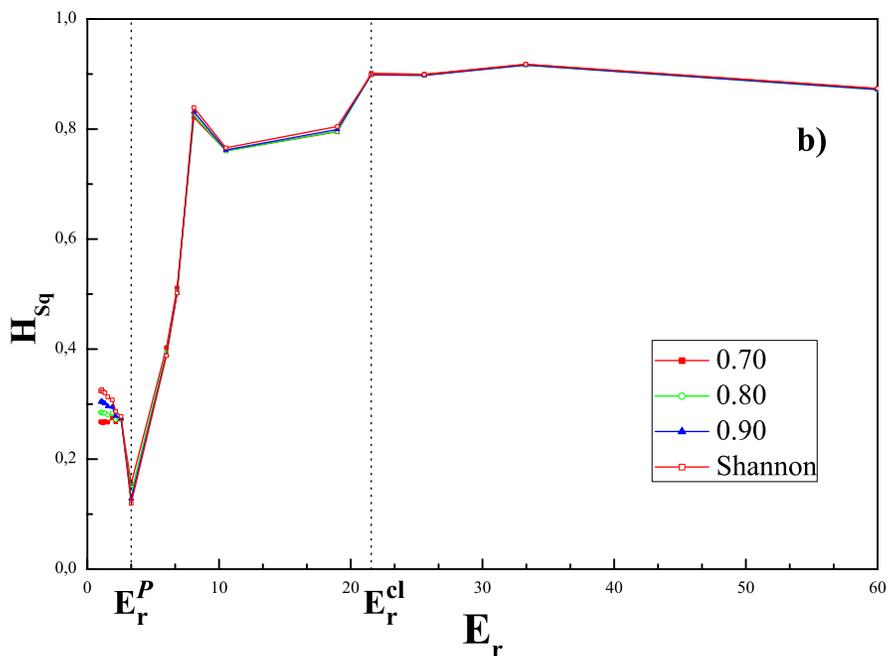
mejorando la descripción “Shannon”.



Figs. 1. \mathcal{H}_{S_q} vs. E_r

$$0 < q \leq 1$$

La Entropía de Shannon
tambien es graficada



Caso Entropía
Wavelet

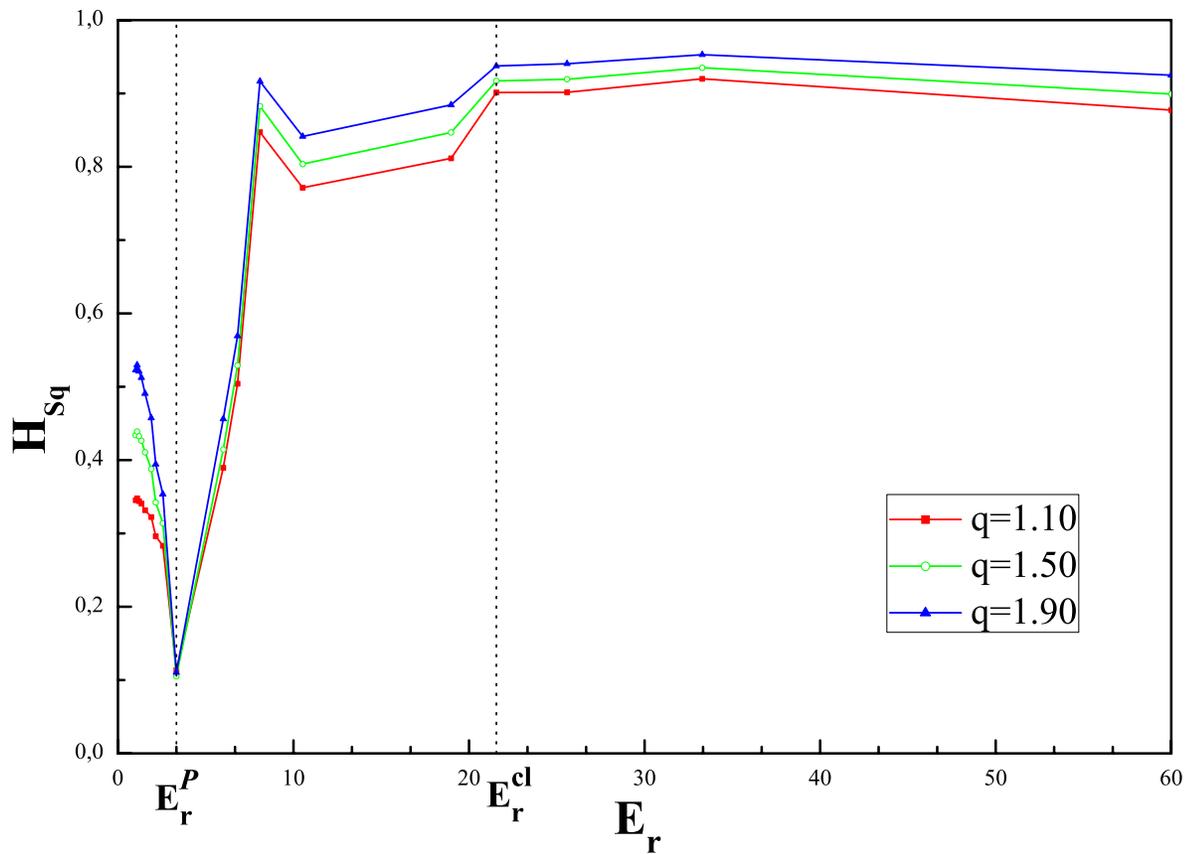


Fig. 2. \mathcal{H}_{S_q} vs. E_r
 $1 < q \leq 2$

Caso Entropía
 Wavelet

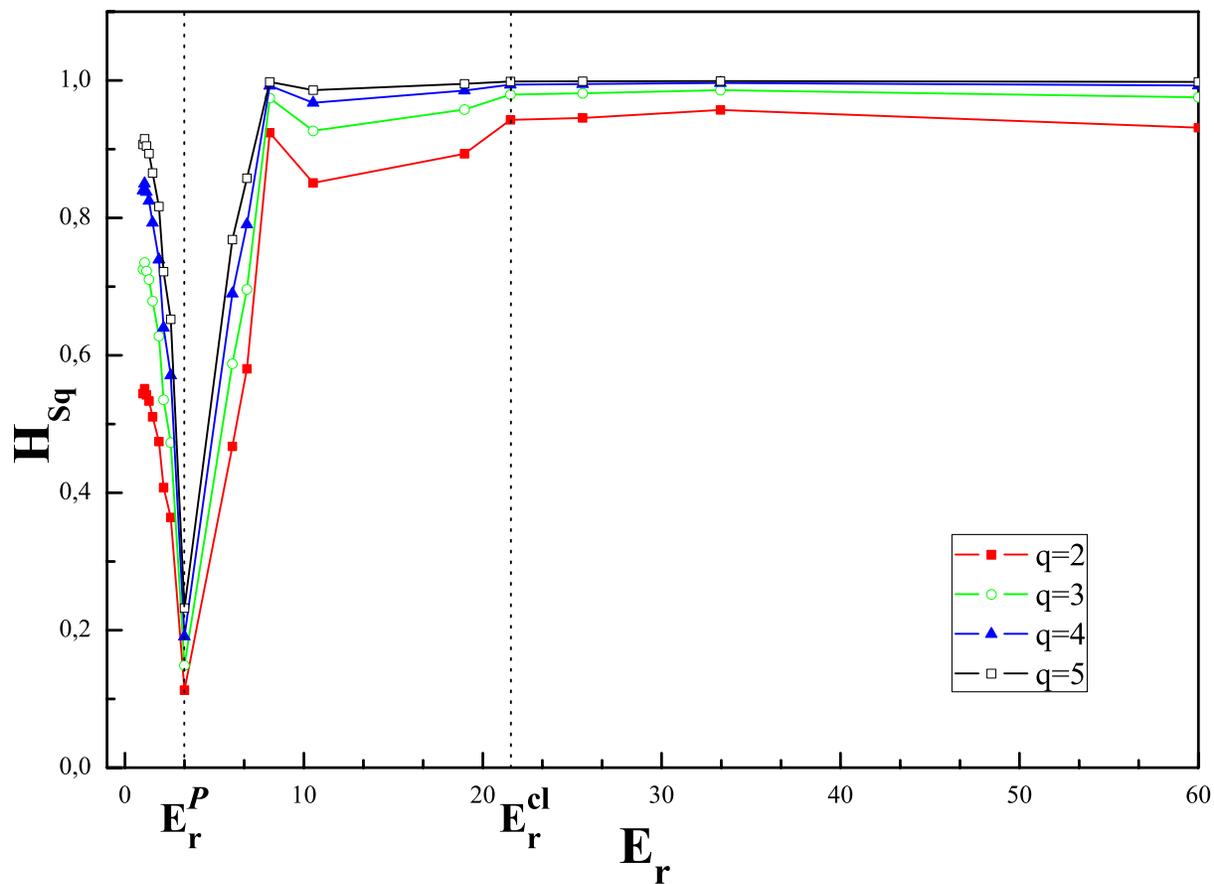


Fig. 3. \mathcal{H}_{S_q} vs. E_r
 $2 \leq q \leq 5$

Caso Entropía
 Wavelet

Resultados Entropía Tsallis de Permutación

Nro. De puntos de la serie $M=5000$, Dimensión de embedding $D=5$ ($M \gg D!$ se cumple).

- ❑ **Identifica correctamente las tres regiones en el mismo rango**

$$0 < q < 5.$$

- ❑ **Optimiza la descripción de la zona cuántica en todo el rango.**

- ❑ Representa mejor la velocidad de convergencia hacia el caso clásico que la entropía Shannon para $q > 1$, **es decir mejora la representación de la zona clásica. Optimiza esta descripción para**

$$q > 2.$$

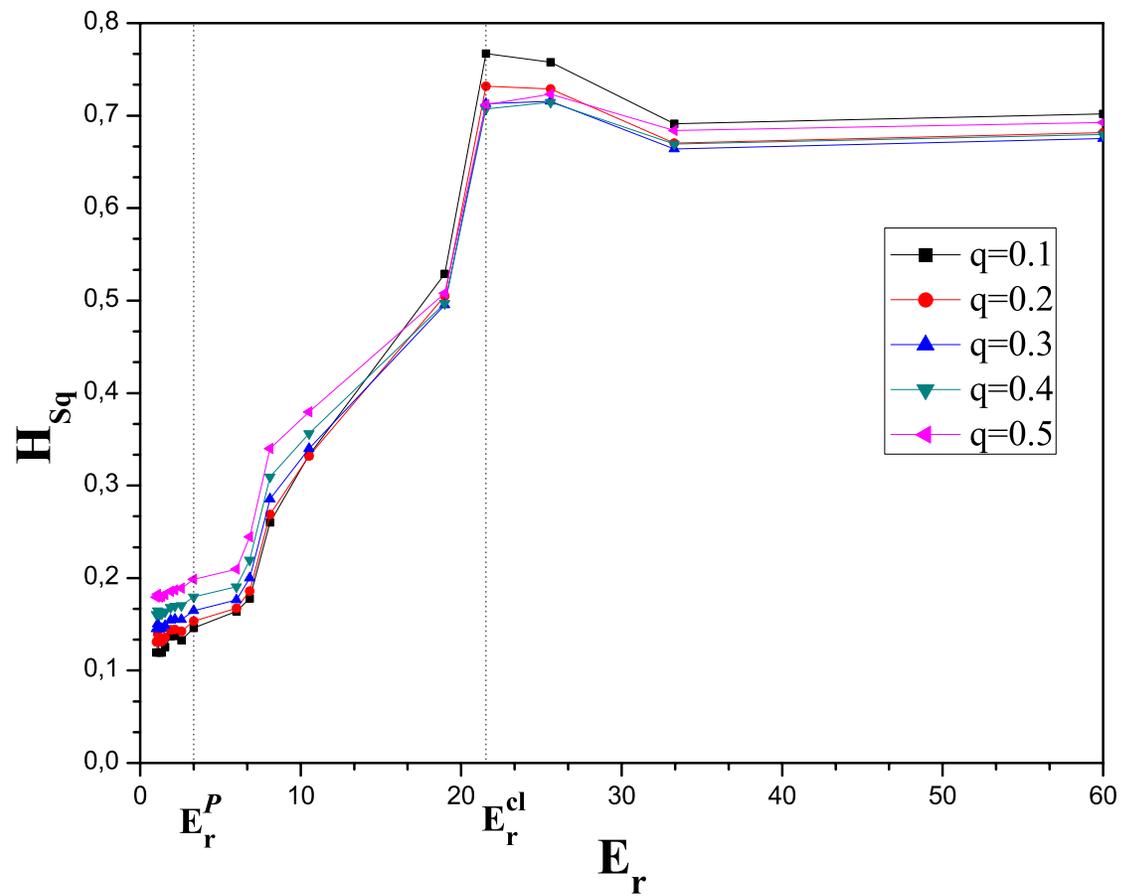


Fig. 4. \mathcal{H}_{S_q} vs. E_r
 $0 \leq q \leq 0.5$

Caso Entropía
 Permutación

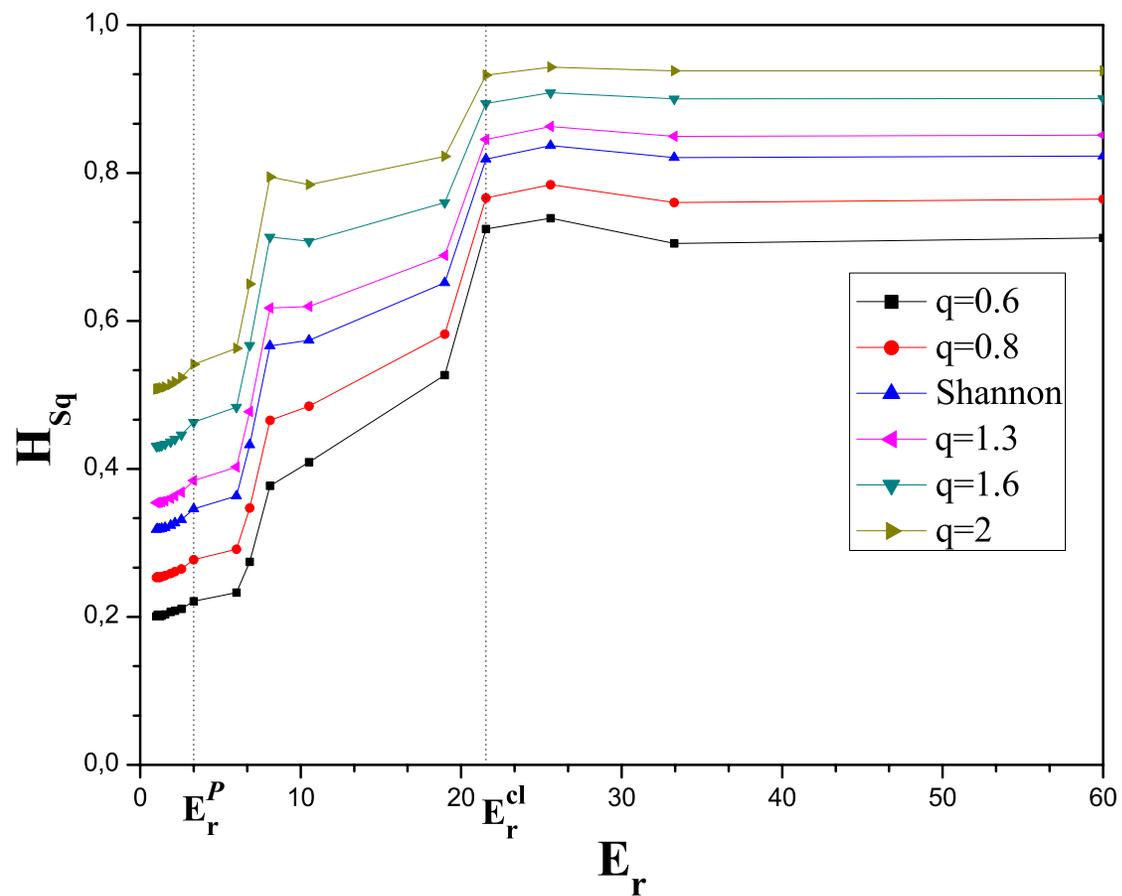


Fig. 5. \mathcal{H}_{S_q} vs. E_r
 $0.6 \leq q \leq 2$

Caso Entropía
 Wavelet

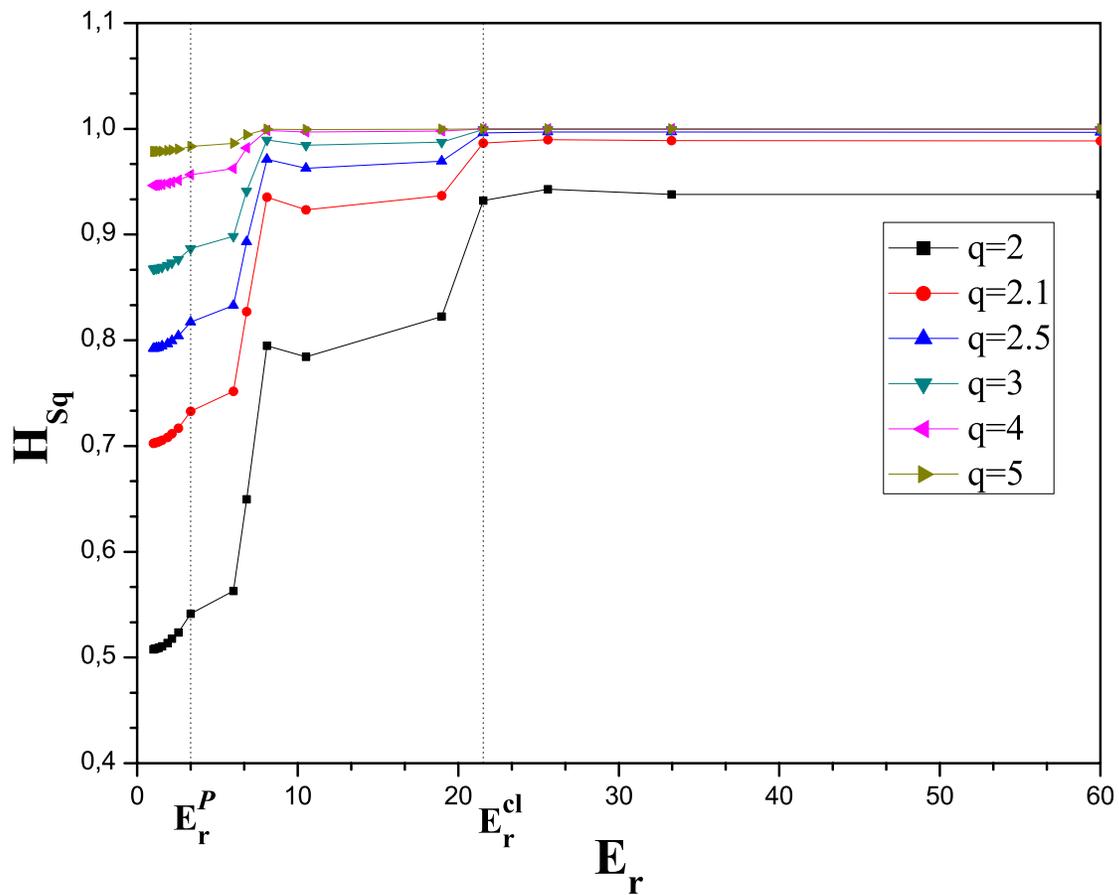


Fig. 6. \mathcal{H}_{S_q} vs. E_r
 $2 \leq q \leq 5$

Caso Entropía
 Wavelet

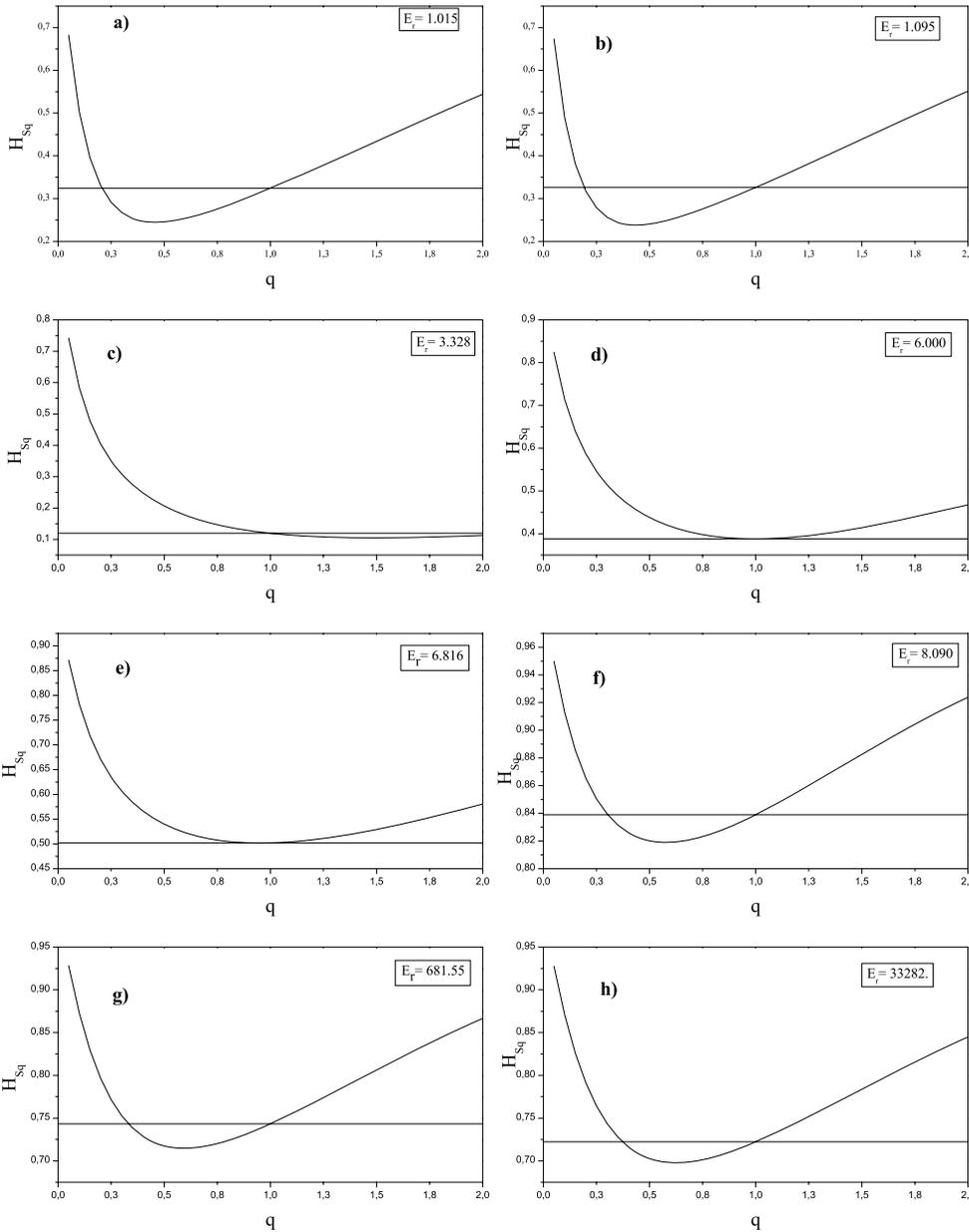


Fig. 7. \mathcal{H}_{S_q} vs. q
 La línea horizontal es Shannon
 a) y b) zona cuántica
 c) , d), e), f) transición
 g) Y h) zona clásica
 c) Corresponde a $E_r^{\mathcal{P}}$

Caso Entropía Wavelet

Otros q -cuantificadores

Las figuras anteriores nos llevan a buscar cuantificadores sobre las curvas \mathcal{H}_{S_q} vs. q .

□ Introducimos la \mathcal{H}_{S_q} -curvature

$$\kappa(q, E_r) = \frac{\left| \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{S_q}}{\partial q^2} \right|}{\left(1 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}_{S_q}}{\partial q} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

evaluada en el valor de q donde la entropía es mínima (q_M). Este mismo valor q_M será un cuantificador.

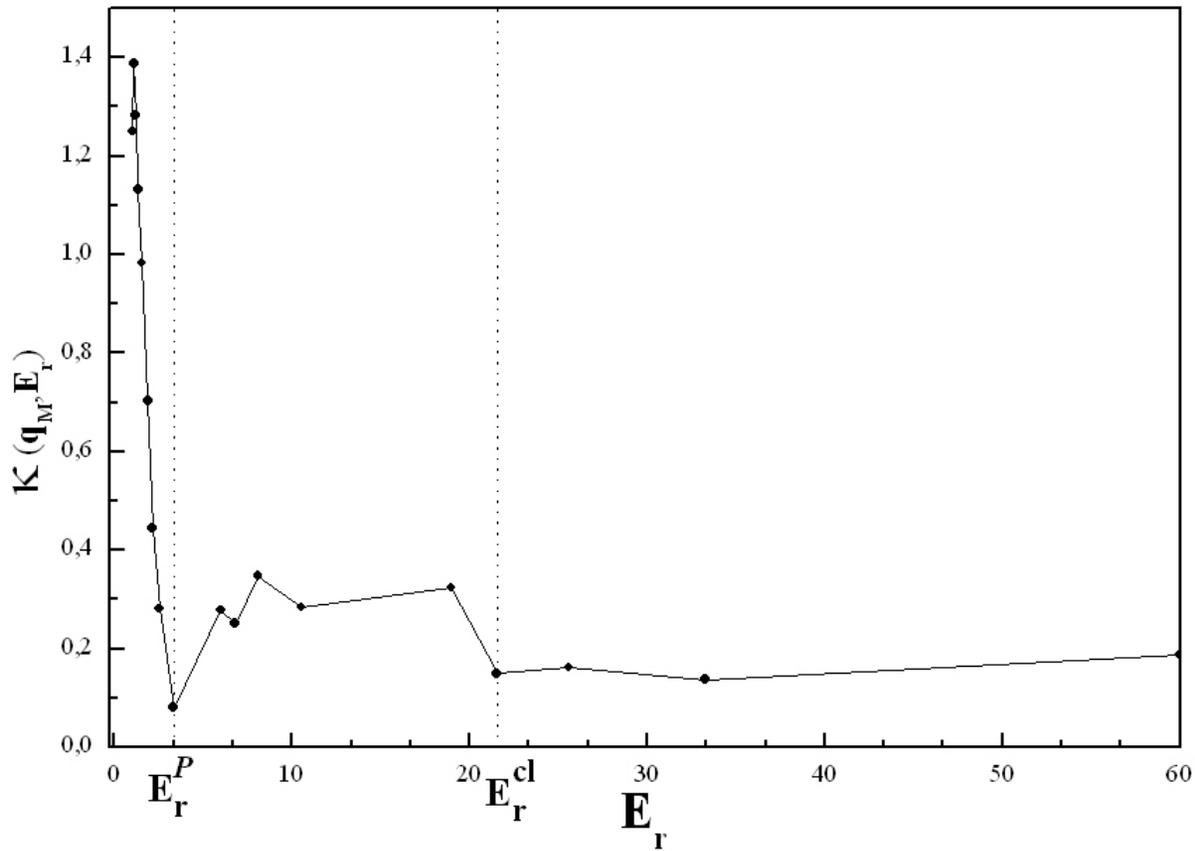
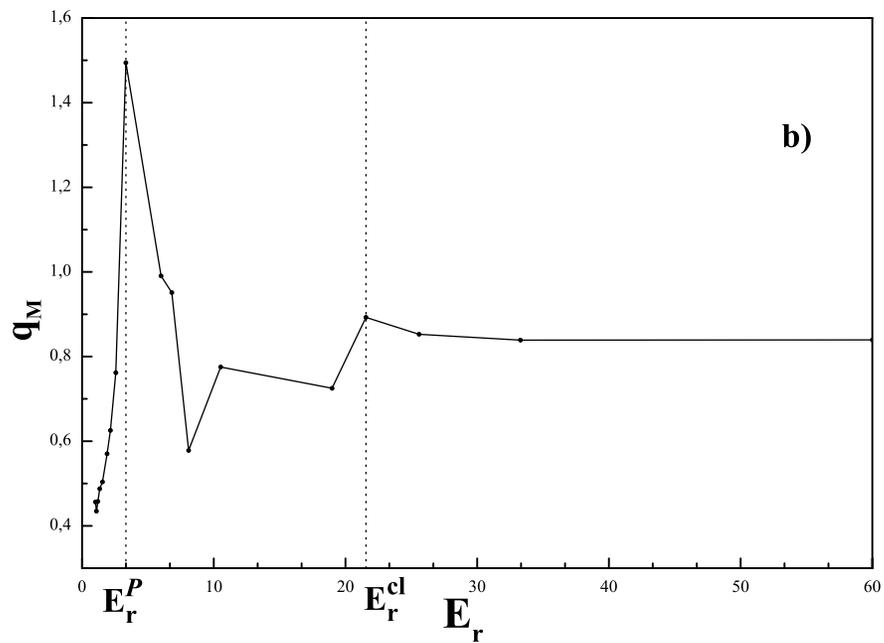
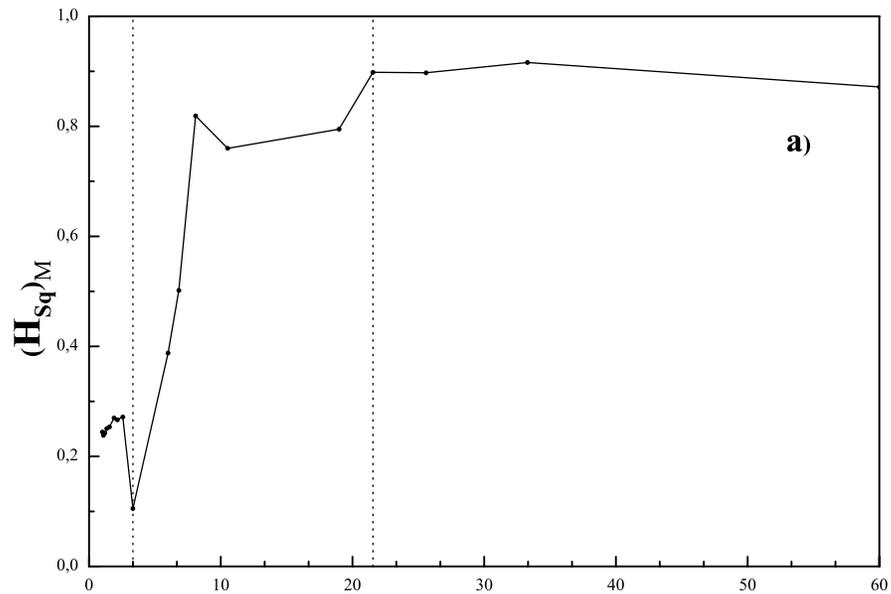


Fig. 8. La curvatura $\kappa(q_M, E_r)$ vs. E_r
 Calculada en el q que minimiza la entropía

Caso Entropía
 Wavelet



Figs. 9.
9a) Valor mínimo de la Entropía $(\mathcal{H}_{S_q})_M$
9b) El valor de q donde se hace mínima la Entropía q_M

Caso Entropía Wavelet

Conclusiones

❑ La q-entropías normalizadas Wavelet y de Permutación identifican correctamente las tres zonas del proceso en el mismo rango:

$$0 < q < 5.$$

❑ La q-Entropía Wavelet mejora la descripción de la zona cuántica que da la Shannon (Wavelet), en el rango $0.1 < q \leq 0.4$.

❑ La q-Entropía de Permutación optimiza la descripción de la zona cuántica en todo el rango.

❑ La q-Entropía de Permutación mejora la representación de la zona clásica que da la Entropía Shannon para $q > 1$. Optimiza esta descripción para $q > 2$.

❑ Hemos encontrado (caso Wavelet), otros cuantificadores del LC, como la curvatura calculada en el $q = q_M$ que minimiza \mathcal{H}_{S_q} y el propio q_M .

Referencias

- [1] A.M. Kowalski, M.T. Martin, A. Plastino, A.N. Proto and O.A. Rosso, Phys. Lett. A 311, 180 (2003).
- [2] A.M. Kowalski, M.T. Martin, A. Plastino and O.A. Rosso, Int. J. Mod.Phys. B 19, 2273 (2005).
- [3] A.M. Kowalski, M.T. Martin, A. Plastino and O.A. Rosso, Physica D **233**, 21 (2007).
- [4] A.M. Kowalski, M.T. Martin, A. Plastino, L. Zunino, Physica A 388, 1985 (2009).
- [5] A.M. Kowalski, A. Plastino (submitido a Physica A).
- [6] A.M. Kowalski, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Lett. A 297, 162 (2002).
- [7] A.M. Kowalski, M.T. Martin, A. Plastino, and A.N. Proto, International Journal of Bifurcation and Chaos 13 No. 8, 2315 (2003).

FIN

¡GRACIAS!

Apéndice: Ecuaciones semiclásicas de Movimiento

Consideramos la interacción de un sistema clásico y otro cuántico, con hamiltoniano:

$$H = H_q + H_{cl} + H_{cl}^q,$$

Evol. temporal variables cuánticas, las canónicas:

$$\frac{dO}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, O], \quad \frac{d\langle O \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, O] \rangle,$$

Evol. temporal variables clásicas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial P}, \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial X}. \end{aligned}$$