Transformaciones en el plano complejo con SCILAB

Georgina B. Rodríguez y Marta G. Caligaris

Grupo Ingeniería & Educación
Facultad Regional San Nicolás – Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332, (2900) San Nicolás, Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

1. Resumen

Los entornos computacionales disponibles como software libre o de código abierto, como OCTAVE o SCILAB, pueden ser muy útiles en la enseñanza de ingeniería.
SCILAB es un software libre, con un entorno similar a MATLAB. Con SCILAB es posible resolver ecuaciones no lineales o sistemas de ecuaciones lineales, calcular autovalores y autovectores, obtener la transformada rápida de Fourier, generar números aleatorios, o realizar gráficos en dos y tres dimensiones, entre otras cosas.
SCILAB fue desarrollado en 1990 por investigadores del INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) y la ENPC (École Nationale des Ponts et Chaussées) y hoy es mantenido y desarrollado por un consorcio creado en el 2003, que tiene actualmente 18 miembros. Puede obtenerse desde www.scilab.org. Desde el mismo sitio puede obtenerse documentación de introducción al uso de SCILAB (Caro y Sepúlveda, 2004; Mora Escobar, 2005) y de SCICOS, un paquete para generar simulaciones.
SCILAB fue concebido para ser un sistema abierto donde el usuario pueda definir nuevos tipos de datos y operaciones sobre estos tipos de datos. Su distribución a través de Internet comenzó en 1994.
SCILAB puede ser utilizado simplemente como una calculadora capaz de realizar operaciones sobre vectores y matrices o para realizar gráficas de curvas y superficies.
Sin embargo, a medida que se avanza en el uso de SCILAB, se hace necesario escribir programas o funciones propios.
Para graficar una función T: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se requiere un espacio de cuatro dimensiones, dos de ellas correspondientes a la variable independiente ($z = x + i\ y$) y las otras dos a la variable dependiente ($w = u + i\ v$). Aún así es posible visualizar funciones complejas a valores complejos realizando un mapeo del plano en el plano, trabajando la parte real y la parte imaginaria de la imagen como funciones escalares de $\Re^2$ en $\Re$ o trabajando el módulo de la imagen como función escalar de $\Re^2$ en $\Re$.
En este trabajo se mostrará cómo utilizar SCILAB para obtener la imagen de una transformación conforme, un mapeo del plano z en el plano w, transformando una región determinada punto por punto. Se analizarán distintos casos, según el dominio contenga o no algún punto singular de la transformación, si lo hubiera. La manera de presentar las transformaciones en el plano complejo es similar a la utilizada en estudios previos para presentar una introducción a las transformaciones lineales (Caligaris y col., 1998).

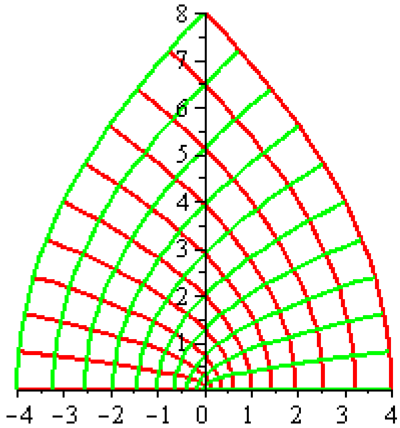
2. Introducción

Para representar gráficamente funciones complejas a variable compleja, se necesitan cuatro dimensiones, dos correspondientes a la variable independiente (z = x + i y) y dos a la variable dependiente (w = u + i v). Existen diferentes opciones para representar funciones complejas a valores complejos:

- ✓ como funciones de $\Re^2$ en $\Re$, graficando las partes real e imaginaria,
- ✓ como una función de $\Re^2$ en $\Re$, graficando el módulo de la imagen,
- ✓ como conjuntos de nivel de la función,
- ✓ como mapeo del plano z en el plano w.

Cuando se piensa de este último modo en una función, se habla de una transformación (Brown y Churchill, 2004). Para obtener estas representaciones gráficas de una función w = f(z) puede recurrirse a programas de álgebra simbólica. Para "ver" la función $w = z^2$ en Maple, por ejemplo:

```
> plots[conformal](z^2, z = 0 .. 2 + 2*I, thickness = 2);
```



Con este comando se obtienen las curvas que son imagen de una grilla rectangular, en este caso del rectángulo [0, 2] x [0, 2], por medio de una transformación conforme. Una transformación es conforme en z_0 si conserva la magnitud y el sentido del ángulo de intersección de dos curvas cualesquiera que se cortan en z_0 (Wunsch, 1997).

3. Mapeos del plano en el plano con Scilab

El gráfico antes presentado sería más claro si se mostraran juntos dominio e imagen de la transformación. De esta manera se realizarán las gráficas en SCILAB.

Para los programas o funciones que se escriben en SCILAB se usa la extensión sci. Estas funciones pueden escribirse en cualquier editor de texto: el propio de SCILAB (SciPad) o el bloc de notas, por ejemplo. Se transcriben unas pocas líneas del código utilizado para este trabajo. Quien esté habituado a trabajar con MATLAB apreciará la similitud: los códigos de SCILAB pueden ser usados en MATLAB.

```
// puntos sobre las líneas verticales
for i = 1:n,  for j = 1:250,  xv(i, j) = -1 + .2 *(i-1);  end;  end;
for i = 1:n,   yv(i, :) = -1 + 2 * rand(1, 250);  end;
. . . . . . . .
// gráfico del dominio (grilla rectangular)
subplot(1,2,1)
title('Plano z', 'color', 'black', 'fontsize', 3);
for i = 1:n, plot(xv(i, :), yv(i, :), 'r.', 'MarkerSize', 2),
             plot(xh(i, :), yh(i, :), 'b.', 'MarkerSize', 2), end;
```

A continuación se muestran algunas de las gráficas que pueden obtenerse con SCILAB. Sólo se muestran la barra de menús y la barra de herramientas en la primera figura.

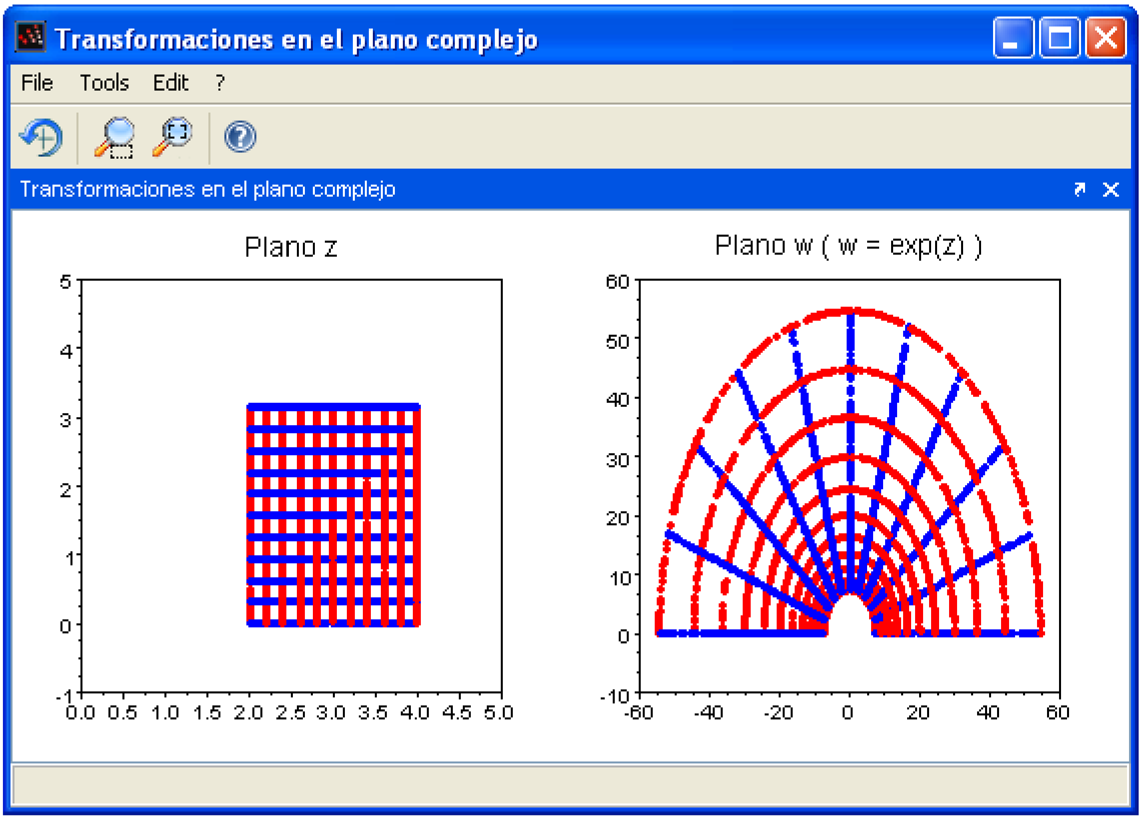


FIGURA 1. Imagen del rectángulo [2, 4] x [0, π] mediante la transformación $w = e^z$

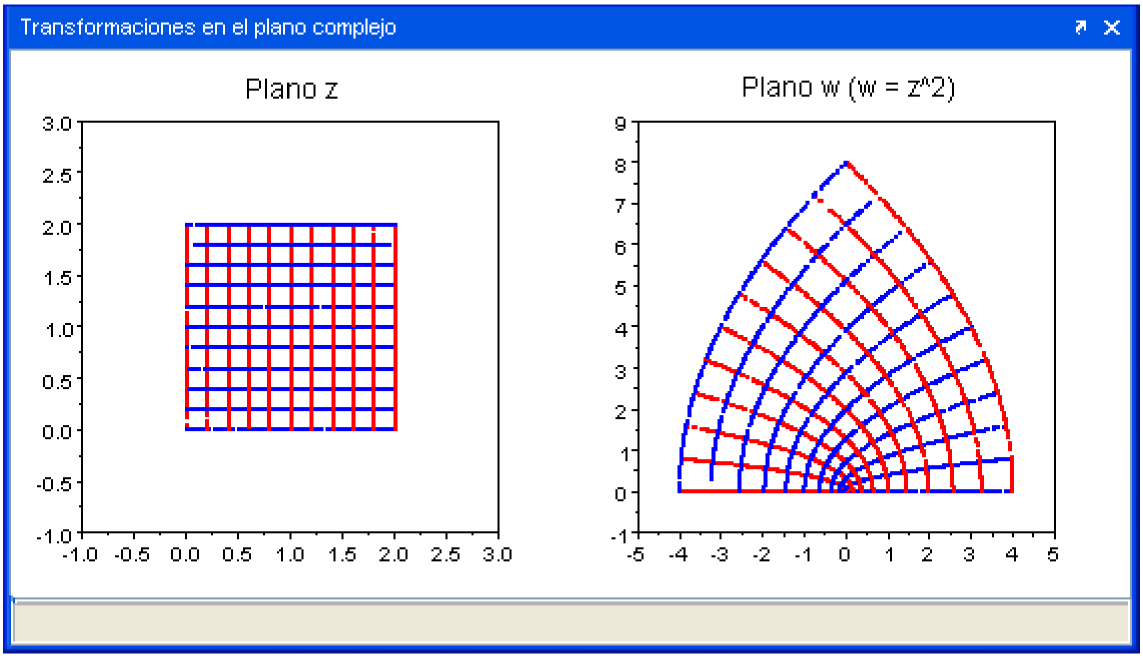


FIGURA 2. Imagen del rectángulo [0, 0] x [2, 2] mediante la transformación $w = z^2$

La figura 2 muestra el mismo ejemplo planteado inicialmente en Maple.

Las figuras 3 y 4 son imágenes de conjuntos que contienen puntos singulares de las correspondientes transformaciones. En la figura 3 el punto singular pertenece al interior del domino considerado. En la figura 4 se ve qué sucede cuando un punto singular pertenece a la frontera de la región que se transforma.

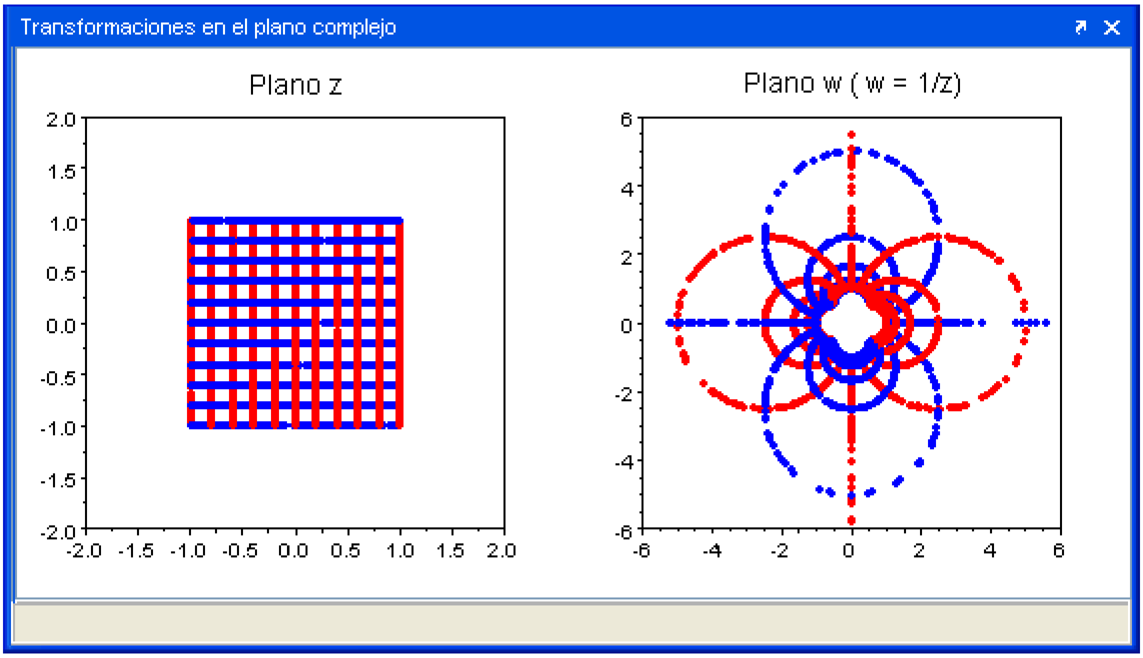


FIGURA 3. Imagen del rectángulo [-1, 1] x [-1, 1] mediante la transformación w = 1/z

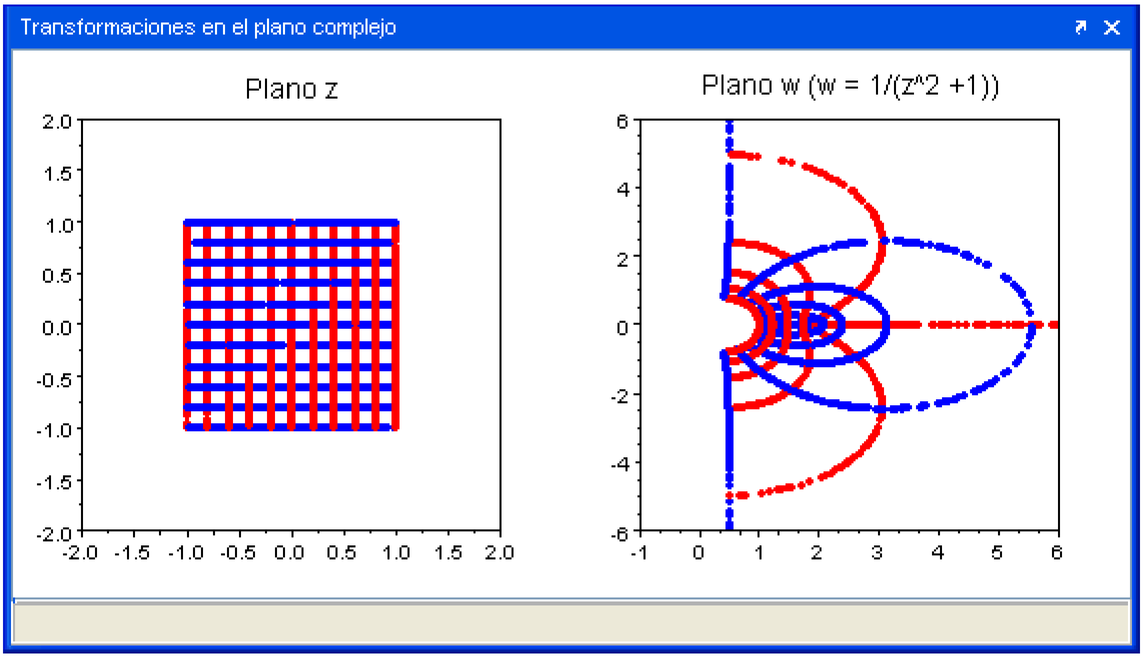


FIGURA 4. Imagen del rectángulo [-1, 1] x [-1, 1] mediante la transformación $w = 1/(z^2 + 1)$

Una grilla rectangular no es la única posibilidad para elegir el conjunto de puntos que se analizará. En la figura 5 se muestra la imagen de circunferencias de diferentes radios, centradas en el origen, mediante la transformación f(z) = i z (una rotación de ángulo $\pi/2$). Al trabajar los puntos de los diferentes cuadrantes en distintos símbolos, se aprecia el cambio entre la región de origen y la imagen.

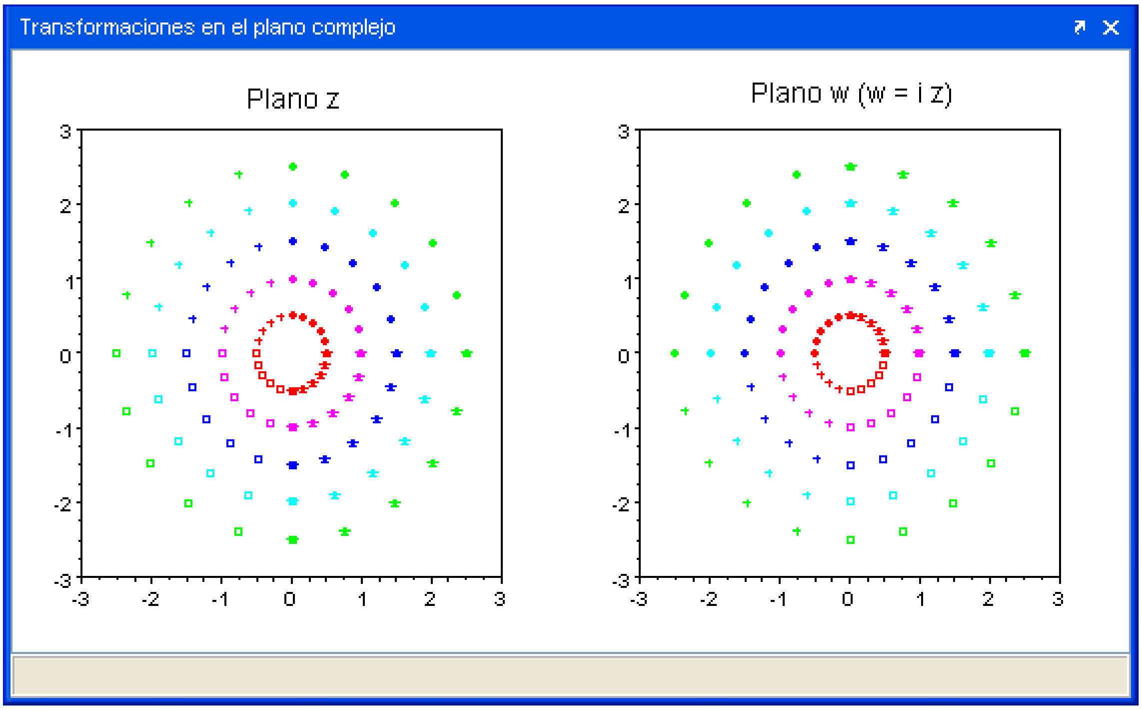


FIGURA 5. Imagen de distintas curvas mediante la transformación w = i z

Si se multiplica z por un complejo de argumento negativo, la rotación se produce en sentido horario.
Es un buen desafío y una excelente ejercitación para los alumnos discutir y demostrar analíticamente los hechos que ven en los gráficos.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una alternativa para representar gráficamente diversas transformaciones en el plano complejo, que de otra manera serían difíciles de visualizar. Se ha utilizado un software libre, SCILAB, que proporciona al alumno las herramientas necesarias para escribir sus propias funciones, basadas, o no, en las que proporciona el docente de la asignatura. Este mismo software podrá servirle luego en su trabajo profesional.

5. Bibliografía

- Brown, J.W. & Churchill, R.V. (2004) Teoría de funciones de variable compleja. Séptima edición. McGraw Hill
- Caligaris, R.E., Rodríguez, G.B. y Caligaris, M.G. (1998) "Linear Transformations for Beginners". Mathematica in Education and Research, **7** (2) 29-33.
- Caro, A.A. y Sepúlveda, C.V. (2004) Fundamentos de SCILAB y aplicaciones, en www.scilab.org
- Mora Escobar, H.M. (2005) Introducción a SCILAB, en www.scilab.org
- Wunsch, A. D. (1997) Variable compleja con aplicaciones. Segunda edición. Addison Wesley Iberoamericana